

UNE ACTIVITE EN OR !!

Groupe « Débat Scientifique »
de l'IREM de grenoble¹

Narration d'une expérimentation, analyse et proposition d'un scénario alternatif

Dans ce texte « Nous » représente un groupe de l'IREM de Grenoble qui travaille sur la recherche de situations permettant de mieux faire la dévolution d'une réelle responsabilité scientifique aux élèves d'une classe ou aux étudiants d'un amphi; « je » représente un membre du groupe qui, en cherchant un problème à faire faire à la maison à ses élèves, est « tombé sur un de ces exercices en or » en ce sens qu'il lui est apparu au premier jet comme très adapté à notre problématique.

Ce membre a par suite donné cet exercice à sa classe de seconde. Surpris par la réaction de ses élèves il a saisi notre groupe de recherche de ce phénomène et nous avons essayé de l'analyser ensemble pour comprendre pourquoi un exercice si bien construit, qui en un sens répondait si bien à nos attentes, n'avait pas vraiment provoqué le comportement qu'on espérait des élèves.

Ce texte est donc le mixte de ce travail individuel et collectif; il nous paraît intéressant à vous soumettre dans la mesure où les questions qu'il pose rejoignent, il nous semble, les interrogations que nous avons tous probablement quand nous effectuons le choix ou la construction d'un exo à donner à nos élèves/étudiants pour les faire réfléchir à une question qui nous semble importante.

Ce texte collectif est donc présenté sous forme de narration de recherche par le prof expérimentateur.

Introduction

Parmi tous les types d'exercices destinés à être faits en classe comme à la maison, à l'entraînement technique comme à la découverte de nouvelles notions, le Graal du professeur n'est-il pas cette activité « en or » qui rend l'élève actif mais qui le cadre suffisamment pour lui permettre de découvrir, seul ou avec très peu d'aide externe, des nouveautés et lui facilite ainsi l'assimilation du cours qui devient alors pour lui « naturel et quasi évident ».

Cette activité « miraculeuse » peut-on espérer la rencontrer, la fabriquer, la pratiquer en classe, ou bien n'est-elle qu'un leurre, un fantasme?

Voici un exercice, extrait du manuel de mathématiques de seconde de Belin et emprunté à une évaluation nationale à l'entrée de seconde, qui m'a semblé à première lecture correspondre à cette ambition : rendre l'élève actif, découvreur et co-bâtitseur de son propre savoir.

¹ Le groupe « Débat Scientifique » est composé de Hélène Di martino, Thomas Lecorre, Marc Legrand, Liouba Leroux et Anne Parreau.

Pour nous contacter, écrire à l' Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques de Grenoble, Université Joseph Fourier, Domaine universitaire de Gières et St Martin d'Hères, BP 41 , 38402 Saint Martin d'Hères Cedex ou retrouvez-nous sur son site : <http://www.ac-grenoble.fr/irem/>

Voici l'exercice:

1. a. Calculer à la machine $a = 345678^2$ puis $b = 345676 \times 345680$. Les nombres a et b sont-ils égaux? (*Sur certaines machines on trouve $a = b = 1,194932797E11$ et sur d'autres on trouve $a = 119\,493\,279\,684$, $b = 119\,493\,279\,680$*)

b. Vérifier cette conjecture en calculant, à la machine, le nombre $a - b$. (*Sur la plupart des machines on trouve $a - b = 4$*) Conclure.
2. a. Quelle valeur affiche la calculatrice pour le calcul de $A = 345678901^2 - 345678900 \times 345678902$? (*Sur la plupart des machines on trouve $A = 0$ mais sur certaines on trouve 1*).
b. Quel est le nombre des unités de 345678901^2 ? Celui du nombre $345678900 \times 345678902$? Celui du nombre A ? Le résultat fourni par la calculette est-il exact?

c. x étant un nombre réel quelconque, développer l'expression $x^2 - (x-1)(x+1)$.
En posant $x = 345678901$, quel calcul fait-on en effectuant $x^2 - (x-1)(x+1)$?
Conclure sur la valeur exacte de A .
3. a. Quelle valeur affiche la calculatrice pour le calcul de $B = 34567890^2 - 34567889 \times 134567891$? (*Sur pratiquement toutes les machines on trouve $B = 0$ mais sur certaines on trouve $B = 1$*)
b. Quel devrait-être le résultat?

Cet exercice m'a plu (je n'avais pas envisagé le cas des machines très performantes qui ici calculent tout juste!) car il apparaît comme susceptible de provoquer de multiples apprentissages fondamentaux en plaçant l'élève face à des paradoxes et en lui donnant les moyens de les dépasser seul.

Regardons donc de plus près pour voir

- d'abord comment cet exercice satisfait nos attentes « naturelles » de professeurs,
- ensuite comment des élèves réels d'une classe de seconde ont effectivement répondu à ces attentes.

Nous essayerons ensuite avec les lunettes plus critiques de la didactique de voir si on peut comprendre et anticiper les décalages constatés.

Cela nous conduira à proposer un autre scénario plus à même, il nous semble, de provoquer les apprentissages souhaités.

Les buts de cet exercice nous semblent être essentiellement:

- d'abord de faire découvrir à l'élève que si la calculette est un outil fiable dans les calculs élémentaires avec des nombres pas trop gros, elle peut nous induire en erreur en nous proposant systématiquement un affichage scientifique faussement exact dès que les nombres à traiter sont trop gros pour son calibre d'affichage et que de plus, quelle que soit sa puissance de calcul, elle finira toujours par faire des erreurs d'arrondis importants si on lui donne à traiter de trop gros nombres;

- ensuite de montrer comment l'arithmétique seule permet de démasquer facilement ces insuffisances de la machine et prouve sans appel qu'elle se trompe et comment le calcul algébrique permet de systématiser cette mise en évidence et cette preuve de l'erreur et donne en plus avec aisance le résultat exact qui avait échappé à une machine qui ne peut raisonner comme un humain!
- finalement le but ultime de cet exo nous paraît être d'ordre « méta » un peu prosélytique vis-à-vis du raisonnement mathématique : il s'agit de démontrer à l'élève la supériorité dont il peut disposer sur une machine même assez sophistiquée s'il accepte de mettre en oeuvre les raisonnements qu'il a appris en mathématiques.

Cette triple ambition fait de cet exercice une situation particulièrement riche puisqu'il devrait amener les élèves à être plus vigilants devant l'attitude de paresse intellectuelle qui nous guette tous et nous pousse à faire une confiance aveugle à ce qui nous est montré (affiché) au moyen d'une technique acceptée comme fiable par tous; il devrait aussi « forcer » par la seule contrainte de la contradiction (et non par les injonctions magistrales) les réticences qu'ont beaucoup d'élèves devant tout raisonnement tant soit peu abstrait (ça ne sert à rien ! on n'en est pas capable ! Etc.).

Ici, ça vaut vraiment le coup de faire un petit raisonnement abstrait pas difficile ou un calcul algébrique bien connu pour se convaincre facilement des limites de la machine.

Enfin, bien que très ambitieux sur le fond, cet exercice paraît très raisonnable car le découpage des difficultés est tel qu'on peut espérer que la plupart des élèves ne caleront pas devant la difficulté et arriveront à le résoudre en grande partie seuls en développant ainsi leur autonomie.

Regardons donc d'un peu plus près comment s'articulent les différentes questions de l'exercice pour parvenir à cet équilibre.

Question 1

1. a. Calculer à la machine $a = 345678^2$, puis 345676×345680 . Les nombres a et b sont-ils égaux?

b. Vérifier cette conjecture en calculant, à la machine, le nombre $a - b$.

Conclure.

Dans cette première question,

-si l'élève travaille avec une machine assez puissante il va trouver $a \neq b$ et $a - b \neq 0$ ce qui va probablement renforcer sa conviction que la machine est un outil idéal qui permet de faire sans fatigue et sans erreurs des calculs qui seraient bien fastidieux à réaliser à la main (avec en plus une probabilité d'erreur non négligeable!).

- s'il travaille avec une machine moins puissante, il va tomber sur le paradoxe « d'un côté $a = b$ et de l'autre $a - b \neq 0$ », il devrait donc commencer à mettre en question l'idéologie dominante de supériorité d'une machine qui calcule toujours plus vite et plus exactement que l'homme.

Dans ce second cas, soit il comprend que l'écriture scientifique lui cache une partie des nombres a et b et donc que, s'il est normal de conjecturer que $a = b$ comme lui suggère l'écriture de la machine, il n'est pas invraisemblable qu'un autre calcul qui ne fait plus intervenir cette écriture scientifique dise le contraire; soit il ne voit pas cela et alors, comme il ne peut résoudre seul le paradoxe qui surgit, il est normal de ne pas le laisser se bloquer là et de lui proposer tout de suite une nouvelle action (question 2 a) qui soit sans rapport apparent avec ce qu'il vient de faire pour qu'il puisse poursuivre (les « bons » élèves savent qu'en cas de contradiction il ne faut pas - si cela

n'empêche pas de poursuivre - se poser trop de questions, car dans un exo de math c'est souvent après coup, quand tout est achevé, qu'on peut dépasser les paradoxes qu'on ne savait pas interpréter initialement).

2. a. Quelle valeur affiche la calculatrice pour le calcul de

$A = 345678901^2 - 345678900 \times 345678902$? (la plupart des machines donnent 0 mais certaines -Ti 89- donnent 1)

b. Quel est le nombre des unités de 345678901^2 ? Celui du nombre $345678900 \times 345678902$? Celui du nombre A? Le résultat fourni par la calculette est-il exact?

Se basant sur une confiance aveugle en la machine renforcée par Q1 (ou pas suffisamment déstabilisée par Q1) l'élève va probablement prendre argent comptant le résultat 0 que lui donnera la calculatrice comme réponse au calcul de A (sauf les quelques élèves mieux équipés, ce qui ne semble pas avoir été envisagé par les concepteurs du problème).

Cette certitude en l'exactitude des résultats de la machine ayant été établie sans le moindre recours à un raisonnement mathématique, **il s'agit donc maintenant de porter un coup très sévère à cette croyance et de faire accepter dans un même mouvement à l'élève et que la calculatrice peut commettre des « erreurs » grossières et que les maths sont le bon outil pour les débusquer et les rectifier.**

Les nombres sont bien choisis car grâce à la présence d'un zéro dans les unités, **un raisonnement à la portée de tous** sur le chiffre des unités de A démontre magistralement que A ne peut pas être égal à zéro et **montre donc implacablement que la machine s'est trompée !**

Notre élève étant donc maintenant persuadé que sa machine s'est trompée, peut néanmoins ne pas être totalement déstabilisé par cet avatar; il peut se dire qu'une fois n'est pas coutume ! que l'exception confirme la règle ! et qu'il s'agissait ici de calculs très particuliers.

En imposant en sous-main l'écriture algébrique $x - 1$, x et $x + 1$ de trois entiers consécutifs et en lui proposant de conclure

**« 2. c. x étant un nombre réel quelconque, développer l'expression $x^2 - (x-1)(x+1)$.
En posant $x = 345678901$, quel calcul fait-on en effectuant $x^2 - (x-1)(x+1)$?
Conclure sur la valeur exacte de A. »**

l'élève va non seulement pouvoir confirmer ce que l'arithmétique lui a montré mais en plus il va pouvoir découvrir, s'il est un peu entreprenant, un procédé très général lui permettant de mettre en défaut toute calculatrice (si puissante soit-elle) dès qu'il choisira un entier x assez gros pour que l'écriture de son carré dépasse les capacités de stockage de la machine.

Il va donc pouvoir logiquement conclure à la supériorité incontestable du raisonnement mathématique sur la machine, et partant de là, créer un appétit pour (ou renforcer son désir de) mieux comprendre et maîtriser le calcul algébrique.

Le scénario est donc parfaitement bien huilé puisque des questions simples et graduées guident l'élève dans la découverte des « dysfonctionnements » de la calculatrice et à l'opposé lui montrent dans l'action le bon fonctionnement du calcul algébrique.

Le souci de ne pas « perdre » certains élèves en route et par suite de laisser un maximum de travail autonome à la disposition de tous les élèves est particulièrement manifeste dans la question 2-c qui présente aux élèves qui ne l'auraient pas vu, les rapprochements à effectuer : en particulier le rapport entre

$x^2 - (x-1)(x+1)$ et $345678901^2 - 345678900 \times 345678902$, qui n'est pas si évident.

Ainsi peut-on être rassuré en donnant cet exercice à faire à la maison car on est certain de donner à tous les élèves qui travaillent la possibilité de pouvoir le traiter sans aide externe et par suite d'en retirer les apprentissages escomptés.

Question 3

3. a. Quelle valeur affiche la calculatrice pour le calcul de

$$B = 34567890^2 - 34567889 \times 134567891?$$

b. Quel devrait-être le résultat?

Cette dernière question est d'ailleurs là pour valoriser auprès de l'élève qui a travaillé l'apprentissage qu'il vient d'effectuer : en effet si notre élève a compris ce qu'il vient de faire, il va évaluer à la calculatrice cet énorme calcul mais maintenant il se méfiera avec raison de ses résultats pas toujours corrects pour les grands nombres.

Il pourra reconnaître une nouvelle occurrence de l'expression du 2.c et saura donc que l'on devrait obtenir 1 ; *il peut maintenant anticiper sur l'erreur que la machine ne va pas manquer de commettre !*

Il peut donc en quelque sorte se moquer de cette machine toute puissante mais « idiote » *car maintenant grâce aux mathématiques qu'il a apprises (ou réapprises autrement) il en est redevenu le maître !!!*

(Ceux qui ont des machines assez puissantes pour déjouer ce dernier piège n'auront - s'ils ont compris les enjeux du problème - qu'à augmenter encore le nombre de chiffres jusqu'à faire chuter leur machine !)

En voyant cet énoncé, telle est donc l'analyse positive que j'ai sommairement effectuée, ce qui m'a poussé à le proposer comme devoir à la maison dans une classe de seconde tout à fait standard.

La réalité de la classe

Immense a été ma surprise et terrible ma déconvenue quand est arrivé le moment fatidique de lire leurs productions, car devant l'étendue du désastre comment évaluer positivement le travail consciencieux effectué par beaucoup ? Quelle correction proposer qui ne soit pas humiliante et/ou désespérante pour toutes celles et tous ceux (les deux tiers) qui ont écrit « n'importe quoi! » ??

De façon assez globale les résultats sont les suivants

Plus des deux tiers de la classe passent complètement à côté du problème : soit ils constatent sans mot dire les contradictions $a = b$ à une question et $a \neq b$ à la question suivante, soit ils suppriment les contradictions (par erreur ou falsification?), soit ils les soulignent mais, dans ce dernier cas, ou bien ils ne peuvent rien conclure ou bien ils concluent sans raisons que c'est le dernier résultat obtenu qui est « le bon »

Sur le petit tiers restant qui voit des contradictions et tente de les expliquer, certains - très peu - mettent le doigt soit sur le fait que l'écriture scientifique peut cacher une partie de la réalité d'un

nombre, soit - plus nombreux - sur le fait que leur machine fait des arrondis, n'est pas assez précise pour effectuer ces gros calculs, soit ils soulignent ces deux phénomènes mais sans faire de lien entre eux.

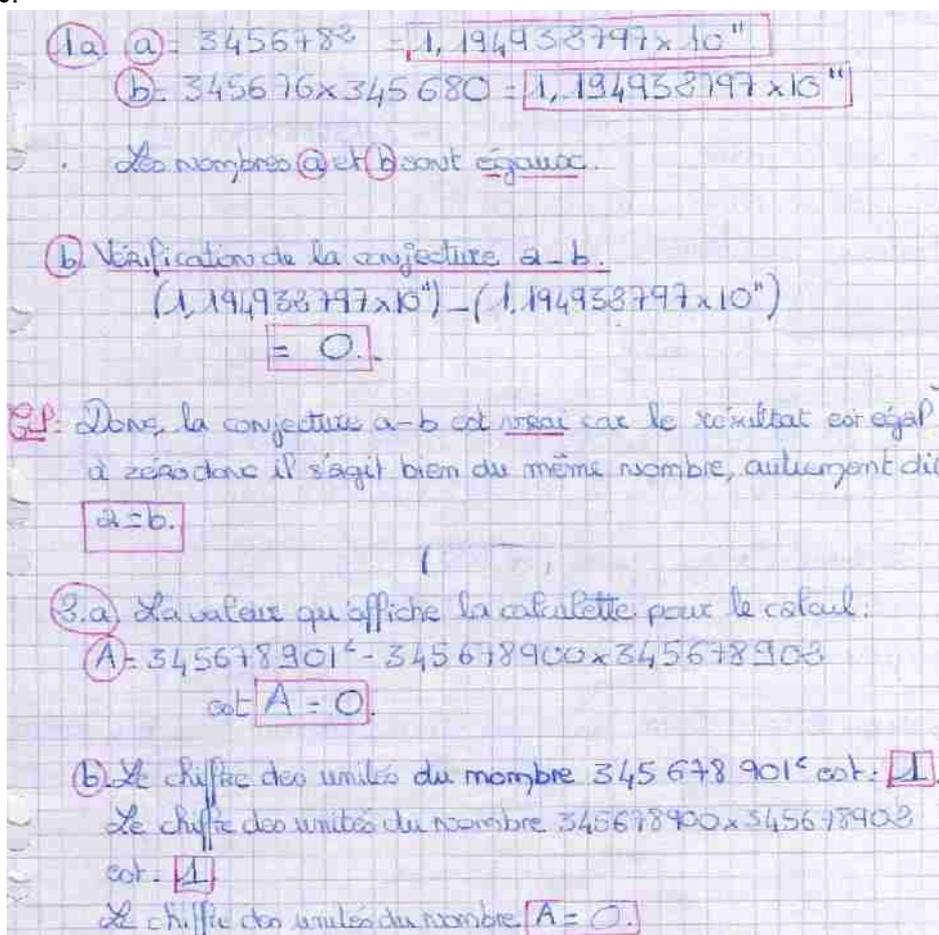
Pour les quelques élèves qui ont une machine plus puissante que celles de leurs camarades, l'exercice devrait leur sembler en un sens stupide car sans contenu épistémologique, mais ils ne le disent pas, deux ont néanmoins remarqué qu'ils n'obtenaient pas les mêmes résultats que leurs camarades, ils notent alors en fin de copie que l'exercice change suivant la machine utilisée mais sans dire en quoi cela change.

En clair aucune copie ne semble répondre véritablement au schéma prévu dans la construction de ce problème : « l'apparition de paradoxes et contradictions devrait obliger l'élève à remettre en cause ses convictions ou ses pratiques erronées, l'aider à prendre conscience de la force et de la puissance du raisonnement mathématique et du calcul littéral, lui montrer de façon incontournable leur supériorité par rapport à un usage trop confiant et aveugle de la machine ».

Aucune copie ne paraît répondre à ce schéma car pratiquement tous les élèves - les « bons » comme les « mauvais » - semblent avoir cherché à traiter les questions une à une en les faisant le moins possible interagir les unes par rapport aux autres, même quand elles se contredisent fortement et que l'énoncé demande de réagir.

Quelques productions d'élèves:

Voici la copie de Maud qui semble avoir fait sérieusement son travail, mais qui parvient à échapper (par erreur de calcul ou pour que « ça s'arrange! » ???) à la contradiction majeure prévue par l'énoncé.



Cécile, elle, parvient en donnant une valeur particulière à x à éviter la contradiction que le calcul formel voulait rendre évidente:

2 c) $x =$ un nombre réel quelconque
 l'expression $x^2 - (x-1)(x+1)$
 supposant que le nombre x vaut 345 678 901
 , le résultat de l'expression se doit d'être :

$$= 345\,678\,901^2 - (345\,678\,901 - 1)(345\,678\,901 + 1)$$

$$= 1,194\,939\,026 \cdot 10^{17} - (345\,678\,900)(345\,678\,902)$$

$$= 1,194\,939\,026 \cdot 10^{17} - 345\,678\,900 \times 345\,678\,902$$

$$= 1,194\,939\,026 \cdot 10^{17} - 1,194\,939\,026 \cdot 10^{17}$$

$$= 0$$

Marion, elle, reconnaît qu'il y a un problème « le résultat devrait être 0 » mais cela n'engendre aucune réaction de rejet devant le comportement apparemment contradictoire de la machine.

III a) $B = 345\,678\,90^2 - 345\,678\,89 \times 345\,678\,91$
 $B = 10$

b) Le résultat devrait être 0 car $345\,678\,90^2$ et $345\,678\,89 \times 345\,678\,91$ font $1,194\,939\,019 \times 10^{15}$.

Enfin, Maeva est à chaque instant d'accord avec tout ce que lui suggère sa machine même si celle-ci lui suggère coup sur coup deux conclusions opposées

1.a) A la machine:

$$a = 345\,678^2 = 1,194\,932\,797e+11$$

$$b = 345\,676 \times 345\,680 = 1,194\,932\,797e+11$$

Ces deux nombres a et b sont égaux.

b) En calculant, à la machine, le nombre $a - b =$

$$\rightarrow (345\,678^2) - (345\,676 \times 345\,680) = 4$$

On trouve comme résultat 4, ces deux nombres ne sont donc pas égaux.

Elsa qui avait une machine performante qui a toujours « bien calculé » jusqu'en 3a tombe brutalement sur un problème :

« 3a) la calculatrice affiche $B = 0$

b) le résultat devait être ...je ne sais pas »

Thibaud qui n'a rencontré aucun problème avec sa Ti 89 écrit:

« j'ai fait cet exercice avec une Ti 89 et j'ai comparé avec un élève ayant une graphe 25 , les résultats des calculatrices ne sont pas les mêmes et donc l'exercice change si l'on a une Graphe 25 ou une Ti 89 »

Ce qui semble le troubler ce n'est donc pas le « fait scientifique » que les résultats d'un même calcul changent avec une même machine et entre les machines, c'est plutôt le problème de « justice scolaire » : *tous les élèves n'ont pas eu le même exercice à faire!*

Ces quelques extraits sont « malheureusement » très représentatifs de la mosaïque des réponses produites, réponses qui ne correspondent pas du tout comme vous pouvez le constater dans le schéma de comportement que le texte de ce problème laissait prévoir.

La constante vraiment forte de ces réponses majoritaires est donc qu'elles ne s'insèrent jamais dans une problématique scientifique globale de recherche de cohérence et de non contradiction, mais correspondent à une manière de répondre question par question, soit sans faire de lien avec ce qui précède, soit en s'interdisant de manifester ce lien si cela fait apparaître une contradiction.

Questions cruciales

Comment expliquer un tel écart entre un scénario d'apparence robuste et des productions d'élèves aussi peu cohérentes ? Comment une démarche aussi cadrée conduit-elle à une divergence des réponses aussi importante ? Comment peut-on imaginer un apprentissage de la science sur des bases aussi peu scientifiques ?

Réaction immédiate du professeur : note-sanction et (ré)explication

La réaction classique d'un professeur devant un tel fiasco est d'abord de se désespérer sur le niveau des élèves qu'on lui confie, puis se disant qu'il est là néanmoins pour les instruire et constatant une fois encore qu'ils n'ont « rien compris » au niveau des raisonnements de base, l'unique remède qui se présente à lui semble être, après avoir renvoyé avec force ses élèves à leurs réponses erronées (au moyen d'une correction sur feuille assez sèche et d'une note sévère), de leur (ré)expliquer tout ce qu'ils auraient dû comprendre depuis bien longtemps (au moins depuis la quatrième) et de leur montrer de façon détaillée ce qu'ils auraient dû faire.

Le début d'un doute sur la pertinence de ce choix didactique !

Le problème c'est que nous avons tous réagi maintes fois comme cela, les professeurs qui ont eu nos élèves avant nous ont probablement fait leur travail et leur ont certainement déjà donné à plusieurs reprises ces explications détaillées qu'ils n'appliquent toujours pas; en tout cas l'expérience d'aujourd'hui montre que c'est un échec cuisant puisque deux tiers d'entre eux semblent n'avoir jamais rencontré puis surmonté ces difficultés !!!

Par suite, sans être immensément pessimiste, on peut prévoir que si nous expliquons à nouveau tout en détail aujourd'hui (comme nos coutumes didactiques nous poussent à le faire), apparemment ***ils « comprendront » tout au moment même (ils ne se rebifferont pas, ils acquiesceront, certains diront même que c'est évident !) et ce sera néanmoins... probablement... un « coup pour rien ! »***

Un « coup pour rien » vu l'étendue et la profondeur du désastre, vu l'éloignement de la compréhension d'une démarche scientifique que la plupart des copies laisse entrevoir!

Un « coup pour rien » car ceux qui ne comprendront pas sur le fond nos explications lumineuses n'oseront pas le dire (vu que nous nous sommes montré très fâchés par leur attitude « illogique »), pire encore ceux qui sont trop éloignés de toute préoccupation scientifique (peut-être plus de la moitié) ne se rendront même pas compte qu'ils ne comprennent pas le fond de nos explications, car si nous sommes assez convaincants, ils acquiesceront sincèrement à nos commentaires persuasifs « il est bien évident ! », « en toute logique ! » « avec un peu de réflexion, un peu de jugeote ou de bon sens ! » etc .

Dans ces conditions, il est probable que si dans trois semaines nous osons reposer un problème analogue (même encore un peu plus cadré pour qu'ils ne puissent pas s'écarter des comportements attendus) nous prendrons le risque d'aller au devant d'un nouvel échec tout aussi amer, si ce n'est plus encore, vu l'énergie et le temps que nous aurons consacrés à ce type d'apprentissage.

Une prise de conscience qui peut nous pousser au renoncement épistémologique.

Las de ces échecs collectifs qui peuvent, quand ils se répètent, rendre l'atmosphère de la classe irrespirable, ne risque-t-on pas alors d'abandonner tout espoir d'une compréhension autonome de nos élèves : puisqu'ils ne perçoivent pas les contradictions et que ces dernières ne provoquent aucun de ces retours en arrière qui font avancer la science, ne sommes-nous pas condamnés à en rabattre sur nos ambitions éducatives à base d'épistémologie consistante, ***ne devons-nous pas choisir (pour sauver la classe) d'opter pour une pédagogie de la fuite en avant en évitant de placer nous-mêmes nos élèves face à ces paradoxes et contradictions qui aident, quand on les surmonte, à comprendre la signification des savoirs scientifiques mais qui plongent la classe dans un tissu d'incohérence quand le niveau moyen des élèves ne permet pas de les dépasser ?***

Dans ces conditions quelle sera encore la signification d'un apprentissage des mathématiques au sein d'une initiation à la démarche scientifique ?

Quelle sera alors la portée éducative d'un enseignement scientifique censé aider tout futur citoyen à prendre des décisions collectives de façon plus raisonnée ?

Ma réaction seconde, induite par notre recherche

Taraudé par ce questionnement d'ordre didactique, mais aussi scientifique et éthique qui oriente le travail de notre groupe de recherche IREM sur le « débat scientifique », j'ai relaté cette aventure dans notre groupe de recherche, et comme ce fait didactique nous est vite apparu comme très significatif en terme de non dévolution d'une responsabilité scientifique, nous nous sommes mis à réfléchir globalement et localement à tout ce qui s'était passé et aux liens qu'on pouvait établir entre la façon dont le problème avait été posé et les réactions des élèves.

Contrairement à ce que j'avais ressenti à la première lecture, il me semble aujourd'hui assez évident que si on lit ce texte d'exercice avec un regard didactique un peu plus critique que celui que j'avais adopté en choisissant rapidement cet exo parmi tant d'autres, on peut se rendre compte à de nombreux indices que le fiasco de ce montage était, pour l'essentiel, totalement prévisible (cet exo donné un peu plus tard dans une classe d'un collègue a provoqué approximativement les mêmes comportements d'élèves).

A notre avis le fiasco était prévisible

Pour comprendre ce qui s'est passé, regardons de près l'activité proposée aux élèves et pour cela chaussons trois types de lunettes : d'abord des lunettes de type épistémologique, puis celles de la recherche d'une cohérence dans la démarche didactique adoptée et enfin celles de la recherche d'une cohérence dans la démarche scientifique proposée ici (démarche prônée et vue par beaucoup de professeurs de sciences et de math en particulier comme un outil éducatif censé contribuer à former un citoyen responsable).

Si on regarde cette activité avec les lunettes de l'épistémologie, on peut observer que l'exercice repose sur deux principes forts sans lesquels l'élève n'a aucune chance de comprendre l'activité proposée. (Or, de toute évidence, ces principes ne sont pas unanimement partagés, et cela participe largement au fiasco observé.)

* **Le premier principe, le principe de non contradiction (ici une même opération effectuée pour évaluer une grandeur ne doit pas conduire à plusieurs résultats différents suivant la façon dont on s'y prend)**, est un principe fondateur des sciences et en particulier des mathématiques.

Or, autant ce principe est devenu si naturel pour un mathématicien qu'il le décline instinctivement dans toute situation et de ce fait a du mal à s'imaginer qu'on puisse raisonner sans, autant il apparaît chaque jour dans nos classes et nos amphis que pour l'élève il n'est ni une évidence ni une nécessité. C'est en réalité un principe à construire patiemment dès les premières années de l'école et à re-décliner à chaque instant tout au long des années d'études et non pas à considérer comme pouvant être succinctement traité dans un chapitre de quatrième ou dans une déclaration liminaire de début de cours; c'est un apprentissage permanent qu'il faut non pas refaire mais enrichir à chaque nouveau cours, car c'est peut-être un des objectifs essentiels de tous nos enseignements des mathématiques.

Il y a, dans les copies d'élèves, le témoignage de deux types d'attitude face à ce principe qui prouve qu'il n'est pas encore agissant (et de très loin) pour la plupart d'entre eux :

- ***Il y a ceux qui acceptent sans réaction les contradictions parce qu'ils semblent ne pas percevoir de contradictions***, par ex. répondent à la question a) que $a = b$ et à la question b) que $a \neq b$ sans commentaire, laissant penser qu'il n'y a pas là de contradiction forte (***puisque les moyens de calculs sont différents, les résultats aussi! puisque les questions sont différentes, les résultats portant sur les mêmes objets peuvent différer aussi!***).
- ***il y a ceux qui refusent d'envisager la moindre contradiction***, ce sont ceux qui soit réutilisent le premier résultat dans toutes les questions suivantes, soit considèrent que le dernier résultat est forcément « le bon », empêchant ainsi la contradiction prévue par l'énoncé de se produire.

La double attitude caractéristique du mathématicien face aux contradictions

Ces deux attitudes d'élève révèlent au professeur de mathématiques ce qu'il a tendance à oublier, tellement cela lui est devenu naturel, ***sa double pratique en un sens paradoxale vis-à-vis des contradictions*** :

- **d'un côté ne pas supporter les contradictions**, c'est-à-dire vouloir, dès qu'elles se présentent, en comprendre suffisamment les raisons pour les éliminer par dépassement;
- d'un autre côté **chercher à en produire pour démasquer des phénomènes subtils**, par exemple pour montrer qu'un phénomène est impossible comme on le fait dans un raisonnement par l'absurde.

Sous cet éclairage on peut mieux comprendre le **décalage énorme qui existe de fait** entre le niveau apparent (très technique) des questions (**Quel est le nombre des unités de 345678901^2 ; calculer à la machine $a = 345678^2$, puis 345676×345678 . Les nombres a et b sont-ils égaux?....**) et le niveau (scientifique) requis pour envisager et tenter de dépasser les contradictions afférentes à ces simples manipulations techniques.

Si on ne suppose plus que ce qui est instinctif chez le mathématicien l'est aussi chez l'élève mais est à construire dans la durée, les réponses des élèves apparaissent, sous ce jour, beaucoup moins étonnantes (elles deviennent même logiques en un certain sens !)

*** Le second principe qui donne sens à cet exercice pourrait se décrire comme le principe de « réalité de l'abstraction »!**

En effet, quand on demande à l'élève d'évaluer le chiffre des unités d'un calcul pour le comparer à celui de la calculatrice, et de conclure ensuite, on suppose que l'élève est déjà convaincu de **la puissance de la pensée** et en particulier, en cas de contradiction, **tient pour plus pertinent le calcul « à la main » du seul chiffre des unités que celui du résultat tout entier à la calculatrice!**

De même quand un peu plus loin, on demande à l'élève de « **développer l'expression $x^2 - (x-1)(x+1)$./.../Conclure sur la valeur exacte de A.** », là encore cette façon de construire la situation présuppose que l'élève **dispose du calcul algébrique comme d'un outil sûr et plus convaincant que la capacité à calculer juste d'une calculatrice.**

Or, dans leurs réponses, les élèves semblent tenir la calculatrice comme plus fiable que leur propre capacité à développer une expression algébrique, et plus fiable que la capacité des expressions algébriques elles-mêmes, pour leur livrer des résultats particuliers évidents et crédibles (*ce qui est vrai pour un x général n'est peut-être pas vrai pour un x particulier !!!*).

On comprend mieux alors que, contrairement à ce qu'espérait le professeur de mathématiques qui a construit cette activité dans une épistémologie de mathématicien, les contradictions fortes avec la calculatrice que les raisonnements formels qu'il suggère devraient engendrer, n'ont que très peu de chances d'aiguiller beaucoup d'élèves sur une remise en question du fonctionnement de leur machine.

Un exemple très significatif de la non réalité - pour beaucoup d'élèves - d'un raisonnement abstrait : la situation des radicaux

Avec ces élèves de seconde j'avais fait quelque temps avant un travail pour leur apprendre à utiliser les fonctions de leur calculette.

- Je leur avais proposé pour finir, de comparer à la calculette $\frac{1}{\sqrt{(4)}-\sqrt{(3)}}$ et $\sqrt{(4)}+\sqrt{(3)}$.
- On remarque que les résultats donnés à la calculette sont identiques, mais certains élèves refusent de conclure sans la totalité de la partie décimale.
- Une élève cependant affirme qu'il y a égalité en vertu d'une propriété : « $\frac{1}{(a-b)} = a+b$ » qu'elle justifiera par : « diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse. »
- Je propose cette propriété à la classe sous forme de conjecture en donnant l'espoir de la transformer en théorème. Vite la classe est convaincue de sa fausseté par des contre-exemples.
- Un élève propose alors de rectifier la propriété : « $\frac{1}{(\sqrt{(a)}-\sqrt{(b)})} = \sqrt{(a)} + \sqrt{(b)}$ »

- La nouvelle conjecture est mise en débat et elle est vite déclarée fausse.
- L'élève alors se ravise et propose

Conjecture : « $\frac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ avec a et b consécutifs et a le plus grand » .

- Les élèves se mettent tous d'accord sur cette propriété, mais dans la discussion, un élève explique qu'il change d'avis car avec a = 4,8 et b = 4,9 ça ne marche pas.
- Presque immédiatement, alors que dans un coin de la classe certains affirment que ce ne sont pas des nombres entiers, un autre dit que même avec les nombres entiers ça ne marche pas !
- Il propose comme contre-exemple « $\frac{1}{(\sqrt{100001}-\sqrt{100000})} = 632,457\ 064$ » et « $\sqrt{100001} + \sqrt{100000} = 632,457113$ » .
- Je demande alors à la classe de chercher à situer « quels sont les exemples de cette conjecture et quels sont les contre-exemples ? »
- Les élèves se mettent au travail et 20 minutes plus tard, on en discute. Le débat est très animé : certains affirment que « c'est pour les grands nombres qu'il y a une différence ! », d'autres expliquent que « plus un nombre est grand, plus la différence est grande ».
- La classe est presque d'accord sur le fait qu'en dessous de 10 000, il n'y a plus de différence. Mais certains restent convaincus qu'il y a une différence même pour les petits nombres (par exemple 3 et 2). Cette différence est invisible à la calculatrice mais bien réelle.
- Une élève va alors chercher les décimales « cachées » et explique qu'il y a bien une différence à la 13ème décimale !!
- L'heure d'après (j'avais initialement prévu que cela ne dure qu'une seule heure), je me sens obligé de « faire finir » cette situation :
 - je fais le résumé de ce qui s'est passé et leur explique que finalement ils ont utilisé leur calculatrice en permanence pour se faire une idée, mais que l'on pourrait aussi essayer de répondre en utilisant le calcul à la main.
 - Ils sont étonnés de ma proposition : il s'agit de calculs de racines !
 - Je leur demande comment, à la main, on compare habituellement deux fractions.
 - Une élève répond qu'il faut les mettre au même dénominateur.
 - Je leur demande alors de le faire.
 - Cinq minutes plus tard une élève le fait au tableau et « prouve » ainsi l'égalité.

Mais je sens bien un flottement : je demande alors aux élèves de se positionner :

« qui fait plus confiance aux résultats de la calculatrice? »

c'est-à-dire qui pense « différent »?

« qui fait plus confiance au calcul »

c'est-à-dire qui pense « égal » ?

- A ma grande stupéfaction il y a alors autant d'élèves d'un côté que de l'autre avec une poignée d'indécis...

- Une discussion a lieu alors donnant tous les arguments : la calculatrice calcule avec un nombre fini de décimales, elle arrondit,.....
- Mais aucun de ces arguments ne parvient à convaincre définitivement la totalité de ceux qui pensent que c'est différent et je vois même des élèves déclarer qu'ils changent d'avis et passent de « égal » à « différent » !!

Et je finis alors par lâcher prise : je déclare que pour moi qui suis convaincu par le calcul à la main « c'est égal », mais que je vois bien que tout le monde n'en est pas persuadé et qu'on y reviendra plus tard !

Je lâche le morceau car la situation me semble bloquée : on est arrivé à une impasse dont les termes sont explicites et incontournables.

J'interprète la position « calculatrice » comme une forme d'assujettissement à l'autorité : certains élèves sont davantage convaincus par le « bras droit du professeur », la calculatrice, que par des calculs sur les radicaux.

Je dois me rendre à l'évidence qu'à cet instant, pour beaucoup de mes élèves de seconde, des calculs simples sur les radicaux simples sont plus opaques et bien moins crédibles que ceux de la calculatrice, donc en cas de conflit, sont moins fiables pour eux.

Je pourrais bien sûr mettre tout mon poids magistral pour emporter en force leur adhésion mais que vais-je alors véritablement gagner en terme de compréhension d'une démarche scientifique ?

Je réalise un peu mieux que tout l'enjeu de notre démarche tient là : comment faire que les éléments théoriques, la raison, le fruit de notre pensée, puissent donner peu à peu à nos élèves des certitudes aussi tangibles qu'un écran de calculatrice, qu'une parole « officielle » !

Avec les lunettes de la cohérence didactique:

Ces lunettes nous révèlent ***un paradoxe auquel l'élève doit faire face*** en permanence dans cette activité: d'un côté ***il devrait appréhender globalement*** le problème pour se fabriquer une réelle compréhension, mais d'un autre côté ***l'énoncé constamment le force*** à revenir ***à une action locale et ponctuelle***.

Quand, par exemple, on demande à l'élève de calculer $a - b$ (question 1 b) à la calculatrice, cette question peut lui apparaître sans lien avec ce qui précède car le projet de la question n'y est pas mentionné.

En effet qu'attend-on d'un élève qui tombe sur une telle question alors qu'il vient de conjecturer que $a=b$: qu'il reste bloqué par non satisfaction de son exigence personnelle de compréhension (A quoi sert de calculer $a-b$? Pourquoi $a-b$ devrait-il faire autre chose que 0 puisqu'on sait déjà que $a = b$), ou qu'il réduise cette exigence en faisant confiance dans le projet de l'auteur. Il calculera alors $a - b$ sans hésitation et ne fera plus le lien avec le calcul précédent, ou au contraire répondra ce qu'il croit devoir répondre sans même faire le calcul (que le résultat fait 0 puisqu'on vient de voir que $a = b$).

Découper pour simplifier ! Oui... mais ...

De façon générale, quand pour des raisons dites « didactiques » on découpe un problème en questions intermédiaires, c'est parce qu'on pense que **le problème posé globalement sera trop difficile à résoudre**, il faut bien voir alors que ***chaque question qui a du sens pour celui qui effectue le découpage*** (il a un projet global et cette question est la nième étape de ce projet) ***peut devenir totalement incongrue, inutile et/ou absurde pour celui qui n'a pas le projet global*** (l'élève) qui ne peut alors faire ce qu'on lui demande qu'en étouffant momentanément son besoin de

sens et de cohérence globale.

Ce qui apparaît clairement dans cette aventure de classe, c'est qu'en faisant vivre constamment l'élève (pour l'aider) dans des situations où ce questionnement personnel sur le pourquoi, cette prise de distance par rapport à l'action sont davantage une gêne qu'une aide, ***on le détourne de toute exigence et envie d'une compréhension globale !***

Ce qui est tout à fait paradoxal dans la façon dont ce problème est posé, c'est que

- d'un côté, il est clair qu'***il ne peut fonctionner comme moyen d'apprentissage que si l'élève fait des liens*** entre les divers résultats obtenus par différents procédés, perçoit des contradictions, et les percevant, rétroagit : partant de ce qu'il peut considérer comme certain, il ose mettre en doute ce qu'il ne peut prouver !
- d'un autre côté, on voit que le problème est posé d'une telle façon qu'on ***décourage très souvent l'élève de chercher à faire le moindre lien*** de sa propre initiative (par ex. s'il fait un lien scientifique fort entre 1a) et 1b) il ne fait pas ce qu'on lui demande: il ne calcule pas $a - b$ puisqu'il sait déjà que $a = b$).

En fait si on regarde bien, on se rend compte que ce problème (comme la plupart des problèmes « bien posés » i.e. faits pour être réussis par tous) a été construit en faisant l'hypothèse que la plupart des élèves sont incapables de faire par eux-mêmes des liens pertinents.

Par exemple, quand soudain on demande de « **développer l'expression $x^2 - (x-1)(x+1)$** », on suggère en fait de formaliser ce qu'on vient de faire, mais on suppose tellement que notre élève ne va pas pouvoir s'en rendre compte, qu'on se sent obligé de rajouter une question supplémentaire: « **En posant $x = 345678901$, quel calcul fait-on en effectuant $x^2 - (x-1)(x+1)$?** ».

On pourrait caricaturer ce geste en disant « ***si tu agis comme nous te le suggérons en pensant à ta place, que penses-tu ?*** »

Si on est en recherche de cohérence didactique, on doit donc choisir :

- **ou bien on pense que notre élève est potentiellement capable de faire des liens** et de produire quelque chose d'intéressant à partir du constat de contradictions, et alors il faut, d'une certaine façon, s'interdire de le guider pas à pas.
En effet, ***si nous persistons dans cette didactique trop « bienveillante »***, cela vide nos enseignements de leur consistance épistémologique, cela permet à nos élèves/étudiants d'avancer sans jamais se prendre en main, cela leur permet de dire des choses justes sans savoir pourquoi, ***cela leur permet surtout de croire qu'ils pensent sans jamais avoir à penser la teneur de ce qu'ils pensent!***

En clair il nous faut trouver un moyen de leur « lâcher les baskets » sans pour autant les laisser seuls face à des problèmes consistants, mais tellement peu didactifiés qu'ils ne peuvent rien en faire par eux-mêmes.

- **ou bien notre élève est jugé a priori incapable de tout cela** (ce n'est pas notre hypothèse car toutes nos expérimentations prouvent le contraire), mais alors, par souci de cohérence didactique, pourquoi le mettre face à une suite de questions dont chacune en soi n'est porteuse d'aucun savoir (le savoir ici émergeant uniquement des liens que l'élève fera et des contradictions que ces liens feront apparaître et qu'il ne décidera pas d'ignorer).

Si donc on regarde les enjeux épistémologiques de ce problème, on constate qu'ici comme ailleurs l'émergence d'un sens, la mise en lumière de l'essentiel reposent sur une capacité à faire des liens, à faire des *mises en ressemblance et en contraste de ce qui est le même et de ce qui est différent : tout le jeu du « même » et du « différent » qui se trouve autour de l'usage du symbole mathématique « = »*.

Si on se donne pour ambition de faire partager ces enjeux de fond à nos élèves, on se doit donc par souci de cohérence didactique :

- 1) **de faire le pari qu'ils sont capables** d'effectuer en partie ces liens par eux-mêmes
- 2) **de s'interdire le morcellement du problème** en multiples questions et sous-questions qui vont empêcher l'élève de distinguer l'important de l'insignifiant, le général de l'anecdotique, et finalement le détourner de toute volonté de sens et de cohérence globale.

La contradiction majeure de ce scénario nous semble être que pour aménager un cheminement de la pensée fiable pour la majorité des élèves, on est conduit à poser une multitude de questions qui n'ont aucun sens pour elles-mêmes, mais seulement un sens en rapport avec une problématique globale dont on pense devoir priver l'élève dans un premier temps pour lui faciliter la tâche.

Le drame ici (comme c'est presque toujours le cas dans ce type de choix didactique) c'est que pour l'élève qui a échappé à tous les mécanismes de prise de sens local qu'on avait finement ciblés pour lui en découpant les tâches, le sens global (dont on l'a privé dans l'action pas à pas pour ne pas le perdre) n'apparaîtra pas non plus à la fin lui permettant de lancer un formidable Euréka ou d'écrire un magnifique CQFD car pour que cela arrive, il faudrait que se produise une rétroaction des actions entreprises sur une question, sur un problème, il faudrait que l'élève ait une problématique. Or ici il n'y a pour lui ni vraie question ni vrai problème et les actions effectuées l'ont été pour lui dans l'incohérence ou l'insignifiance épistémologique (il les a menées parce qu'on lui demandait de le faire).

Une confusion entre but et moyen

Ce décalage entre un questionnement qui tient pour acquis des principes très abstraits, et des questions qui se veulent élémentaires, ne témoigne-t-il pas d'une confusion entre but et moyen. N'est-ce pas le but d'une grande partie de nos activités de résolution de problème que de développer la capacité de l'élève à entrer dans une démarche scientifique et en particulier de donner des occasions aux élèves de rendre consistant le monde des idées en les éprouvant, en réalisant leur efficacité et leurs limites ?

Mais alors pour sortir de ce type d'incohérence dans nos énoncés de problèmes, il nous faut imaginer des processus didactiques qui nous permettent de **dépasser par le haut le double paradoxe** qui apparaît ici :

- d'un côté

« supposer l'élève incapable de penser au niveau de ce qu'on veut lui faire acquérir »

- de l'autre

« tenir pour déjà acquis chez lui ce que l'on veut en fait développer ».

Analyse avec les lunettes de la recherche d'une cohérence globale dans la démarche scientifique adoptée :

Ces lunettes-là nous obligent à poser la question de fond : « Quel rôle scientifique et social veut-on donner aux paradoxes et contradictions qui sont ici le moteur de l'activité? »

Dans la première question, on demande d'effectuer à la calculatrice le calcul de a et b et de les comparer. Ensuite on demande de calculer $a - b$ et de conclure. Ces deux manières de faire conduisent à deux constats différents : l'un l'égalité des deux nombres, l'autre leur différence.

On peut se demander alors ce que peut signifier pour l'élève la consigne « conclure! » car il n'a aucun moyen de déterminer si $a = b$ ou si $a \neq b$, il peut juste dire que les résultats sont contradictoires (ou d'apparence contradictoire s'il a remarqué que l'écriture scientifique d'une machine arrondissait de fait les nombres trop grands).

Mais alors ce qui est très étonnant dans l'organisation méticuleuse de la démarche de pensée de l'élève que cet énoncé impose, c'est que (contrairement aux règles de base de toute démarche scientifique) rien ne suggère ici à l'élève de chercher la raison de ce paradoxe (qui est, il est vrai, plutôt difficile à comprendre seul car interne à une machine dont on ignore le fonctionnement propre).

Dans la deuxième question on demande à nouveau à l'élève de calculer avec la calculatrice, puis on lui suggère d'utiliser un raisonnement mathématique pour mettre en défaut le résultat qu'il vient d'obtenir.

Le problème persistant du dysfonctionnement de la machine devient donc patent mais encore une fois, aucune recherche de cause n'est proposée!

Doit-on en conclure que cela n'est pas déterminant dans l'activité mathématique?

Cela nous conduit à nous interroger sur l'interprétation que l'élève va pouvoir faire de cet oubli systématique de la recherche des raisons des paradoxes et contradictions face auxquels le professeur l'a placé via cet exercice.

A l'opposé des déclarations officielles que les professeurs de science font très souvent (« *réfléchissez ! donnez des raisons, des explications !* ») , **ne l'invite-t-on** pas implicitement ici en le lançant immédiatement dans une suite d'actions censées (contrat didactique) le mener vers la bonne réponse, **à prendre l'habitude** (pour rester performant) **de ne pas** « perdre son temps » **à chercher à comprendre le pourquoi des contradictions qu'il rencontre ?**

Ne va-t-on pas habituer l'élève qui veut être « bon élève » à abandonner très vite les questions personnelles qui le taraudent pour s'attacher à ne répondre qu'aux questions valorisées par le jeu scolaire et qui peuvent a priori lui paraître dérisoires sur un plan scientifique puisque sans aucun lien avec ce qu'il vient de constater ?

A l'opposé de nos déclarations ostentatoires sur les vertus de la science et des mathématiques dont l'enseignement contribuerait à former un citoyen plus responsable, plus capable de résister aux pressions de l'autorité par sa capacité de réflexion, ne sommes-nous pas en train au contraire dans l'action de susciter la docilité, voire de valoriser le fait de savoir faire taire ses insatisfactions intellectuelles?

Quelles conséquences ce système de guidance qui interdit à l'élève de s'arrêter sur ses propres

interrogations peut-il avoir sur la capacité de l'élève à entrer dans une démarche scientifique authentique, c'est-à-dire à se poser ses propres questions sur la nature des phénomènes observés et à tenter d'y répondre? Et comment peut-il apprendre ce jeu de l'esprit si les meilleures occasions de formuler des hypothèses et de les vérifier sont simplement ignorées?

En guise de première conclusion

Ces différentes façons d'analyser un tel exercice permettent après coup de mieux comprendre pourquoi il est assez normal que la plupart de nos élèves passent ici à côté des apprentissages essentiels.

Le fiasco était donc bien prévisible car ***la didactique mise à l'oeuvre ici est contradictoire avec le projet épistémologique*** : *il fallait que l'élève s'interroge, s'insurge contre une sorte de « réalité » absurde du type $a \neq a$, mais pour le faire avancer on l'invite au contraire à être docile, à répéter ce qu'il sait bien faire, à entrer en connivence avec les intentions voilées des questions.*

Certains élèves décryptent très bien ces sous-entendus des questions et savent donc parfaitement y répondre. Pour autant, ont-ils compris la nature des dysfonctionnements de la calculatrice, la force du calcul littéral, la nature des principes qui permettent de conclure avec certitude aux questions posées? N'ont-ils pas joué un jeu beaucoup plus scolaire que scientifique? N'y a-t-il pas simulacre de part et d'autre? Et dans ce cas, sur quels apprentissages réels pouvons-nous tabler même chez ceux qui ont « bien répondu » ???

Après une telle critique, ***la question cruciale est alors : sur un sujet aussi important, autre chose est-il pensable, possible ?***

Peut-on imaginer un scénario qui préserverait mieux l'essentiel : la réelle dévolution du problème garantissant la possibilité d'une authentique démarche scientifique de l'élève, la possibilité pour l'élève de toucher du doigt la puissance du calcul littéral et de mettre en doute les affirmations de la calculette en se fondant sur la force de ses propres convictions?

Un autre scénario possible

Voici le scénario que j'ai adopté quelque temps après en guise de correction.

J'ai (re)présenté le problème à mes élèves de la façon suivante :

– *Il me semble que dans cet exo on nous propose de travailler sur l'idée suivante :*

Idee : « à la place de calculer le carré d'un nombre, on peut tout aussi bien calculer le produit du suivant de ce nombre et son précédent, car la baisse de l'un est compensé par la hausse de l'autre. Dans les deux cas on obtient le même résultat. »

– « *Est-ce une bonne idée, une idée qui marche?* »

– Rapidement la classe s'est mise d'accord sur la fausseté de l'assertion, avec plusieurs contre-exemples.

– J'ai alors demandé de résoudre la conjecture suivante (puisque la précédente semblait n'avoir que des contre-exemples):

Conjecture : « *le carré d'un nombre n'est pas égal au produit de son suivant par son précédent* »

– Et là je leur ai laissé du temps pour se faire une opinion, puis je les ai engagés à en débattre.

- Certains élèves ont déclaré cette conjecture vraie en utilisant la quantité d'exemples encore notés au tableau.
- D'autres au contraire ont cherché des exemples cruciaux en prenant de grands nombres à la calculatrice et ont alors obtenu l'égalité, donc des contre-exemples à cette conjecture.
- Contre-exemples contestés par d'autres : la calculette fait des arrondis !
- Certains élèves ont observé que la différence était toujours de 1 et en ont fait la conjecture.
- J'ai alors proposé à la classe de résoudre la nouvelle conjecture:

Conjecture 2 : « le carré d'un nombre dépasse de 1 le produit de son suivant par son précédent »

Ce qui est apparu très positif dans le débat qui a suivi, c'est que **certains élèves pensaient avec force que ces deux conjectures étaient vraies et d'autres avec autant d'assurance qu'elles étaient fausses**, ce qui a obligé tout le monde (sans que je sois obligé de le demander explicitement) à un travail sur les arguments : pour quelles raisons la calculatrice peut-elle se tromper sur les grands nombres ? Pourquoi affirmer que la différence est toujours 1 si on ne le vérifie que sur quelques exemples ?

- Quand le débat s'est mis à tourner en rond, j'ai « poussé la classe » à trouver « *l'idée de génie!* » *i.e. l'écriture « $n-1, n, n+1$ »* de trois entiers successifs, et il n'a pas été trop difficile alors de se persuader collectivement que cette différence serait toujours de 1.
- **J'ai alors institutionnalisé ce travail** en soulignant d'un côté *la force du calcul littéral pour prouver de façon générale* ce qui apparaît naturellement sur des cas particuliers, j'ai ensuite rappelé *le principe de non contradiction* qui fonde le travail scientifique.

J'ai alors insisté sur les précautions qu'il fallait prendre avec les machines pour ne pas déroger à ce principe : « *quelle que soit la puissance de la machine, elle aura toujours à un moment donné un problème de stockage de l'information qui l'obligera à faire des arrondis et par suite à écrire que deux nombres différents sont néanmoins pour elle égaux ou inversement que deux nombres égaux sont différents !* »

Contrairement à ce qui se serait probablement passé si j'étais resté au niveau local de la correction question par question, j'ai eu le sentiment ici que la classe qui avait certes l'habitude du « débat scientifique » a spontanément mordu à l'hameçon scientifique.

Par suite l'institutionnalisation m'a été facile à faire et a été, il me semble, bien reçue par les élèves dans la mesure où précisément le débat qui avait précédé les avait « naturellement » placés face à un problème global qui obligeait chacun à affiner ses raisonnements (non pour satisfaire à ma demande de professeur) mais pour lutter contre les contradictions apportées par des pairs ; cela les a également poussés, je crois, à apprécier dans un deuxième temps mes raisonnements plus sophistiqués de prof. dans la mesure où ceux-ci palliaient l'insuffisance des arguments qu'ils avaient su opposer à leurs pairs.

Une autre présentation (non testée en classe) **du problème pourrait être :**

- On appelle moyenne arithmétique de deux nombres a et b le nombre $a+b/2$ et moyenne géométrique le nombre racine carrée de $(a.b)$.
- « *Quelles conjectures faire en terme de moyenne à propos de trois entiers consécutifs ?* »

Après un temps de recherche individuelle,

- un premier débat devrait permettre de faire apparaître que
« *le nombre du milieu est moyenne arithmétique des deux autres* »
- puis à le prouver (par quels moyens ? recours à l'écriture $n-1$, n , $n+1$???) ,
- puis à **conjecturer** « *le nombre du milieu n'est jamais moyenne géométrique* ».

Si personne ne pense à tester la conjecture à la calculatrice sur des grands nombres, le professeur aura peut-être intérêt à le suggérer de façon à créer un doute ; de même, devant l'absence de preuve il faudra probablement pousser à « l'idée de génie » de l'écriture n , $n+1$ et $n-1$.

La suite du scénario devrait alors être assez semblable au précédent.

En définitive

Ce qui nous semble clair aujourd'hui c'est que ce problème, s'il est présenté et géré en classe de façon assez globale et ouverte comme on vient de le suggérer, a beaucoup de chances de produire un comportement d'une majorité d'élèves assez voisin de celui que nous venons de décrire, i.e. plus scientifique que purement scolaire!

Il est clair aussi que si le professeur provoque un débat en classe en ouvrant ainsi les questions, il pourra d'autant plus facilement le « gérer » qu'il aura effectué au préalable pour lui-même une analyse du type de celle que nous venons d'effectuer. En effet, pour tenir sa position paradoxale (laisser du doute dans la classe, laisser de l'initiative scientifique à ses élèves, ne pas donner trop vite « la solution » et néanmoins diriger la classe vers un apprentissage conséquent) il faudra qu'il ait au préalable :

- 1) bien repéré ce qui est essentiel à comprendre et à intérioriser ici, en particulier le ***principe de non contradiction*** et le ***principe de réalité de idées***,
- 2) fait ***le pari que ses élèves sont capables*** d'aller assez loin et profond par eux-mêmes dans ces deux domaines,
- 3) pris conscience que ***ses élèves*** (même les « bons » , ceux qui répondent en général assez spontanément bien) ***n'ont certainement pas déjà compris et intériorisé tout cela !***

Nos recherches ont tendance à montrer que lorsqu'une telle analyse, à la fois épistémologique, didactique et sociale, est effectuée au préalable par le professeur, il se trouve de fait beaucoup plus à l'aise pour gérer le débat avec souplesse, à-propos et autorité.

Dans la mesure de nos moyens nous tenterons prochainement de filmer un tel scénario dans une classe afin de pouvoir en faire une présentation sur DVD .

Bibliographie :

Le débat scientifique dans nos classes et nos amphis, pourquoi et comment ?

M. Legrand. <http://www.ac-grenoble.fr/irem/accueil.html> rubrique « Groupe Débat scientifique ».

Mathématiques, mythe ou réalité : un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique.

M. Legrand, juillet 95, Repères IREM n°20&21 (Topiques Éditions) (disponible sur le site).

Débat scientifique en cours de mathématiques.

M. Legrand, janvier 93, Repères IREM n°10 (Topiques Éditions).

Faire véritablement des mathématiques en cours de mathématiques.

Recherche ADIREM-INRP faite en 2003 à l'IREM de Grenoble.

Circuit ou les règles du débat mathématique.

Activité permettant de poser les bases du débat scientifique dans la classe, prochainement disponible sur le site.